对含根式不定积分进行倒代换时可能会出现的一个问题

> 起因是临近数学竞赛，在b站找视频刷题，然后发现视频里提供的方法有问题，评论区也没人说，遂作此文档 ——*20241025*

计算不定积分

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

第一种方法考虑**倒代换**，令$x=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t}}}\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t \\ &= -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + \mathrm{C} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + \mathrm{C}\end{aligned}$$

公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \mathrm{C}$$

第二种方法考虑**根式代换**，令$\sqrt{x^2+1}=t$，$\mathrm{d}x=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}\cdot t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| + \mathrm{C}\end{aligned}$$

公式

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathrm{C}$$

第三种方法考虑**三角代换**，令$x=\tan\theta$，$\mathrm{d}x=\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$，$\sqrt{1+x^2}=\sec\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\tan\theta\sec\theta}\cdot\sec^2\theta\mathrm{d}\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int \csc\theta\mathrm{d}\theta = \ln\left|\csc\theta-\cot\theta\right| + \mathrm{C} \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right| + \mathrm{C}\end{aligned}$$

公式

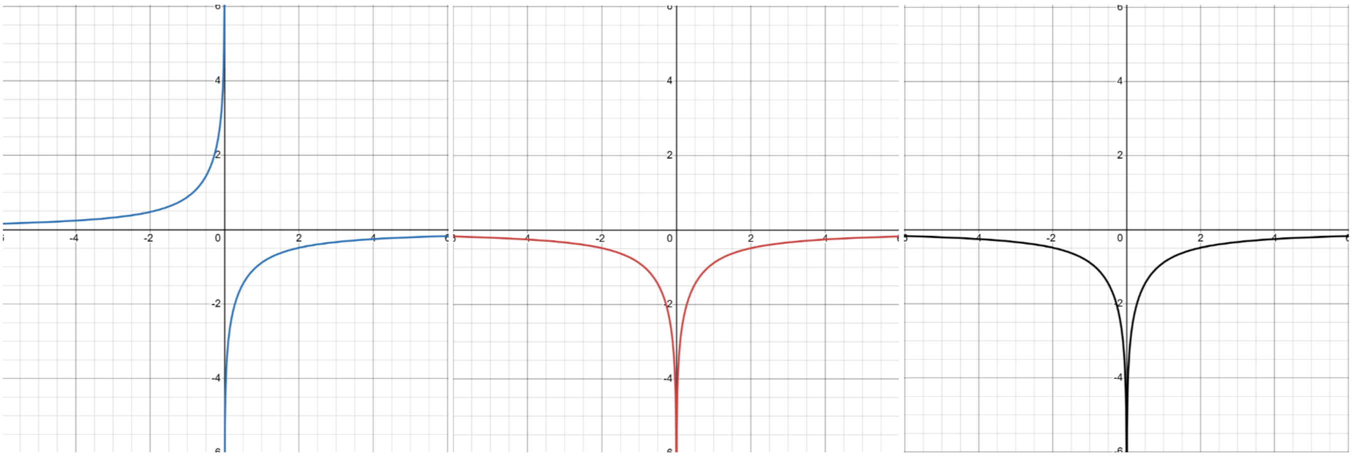
$$\int \csc\theta\mathrm{d}\theta = \ln\left|\csc\theta-\cot\theta\right| + \mathrm{C}$$

似乎三种方法都没什么问题，但…

问题

上述三个解答过程**有一个**是错误的

下面三张图片依次对应上述三个过程所得到的原函数（$\mathrm{C}=0$）



解答

第一个过程中，把 x 拿到根号里约分的时候，实际上是把 x 变成了 $\sqrt{x^2}=|x|$，因此所得到的原函数**只有 x 正半轴的函数图像是正确的**

而对于以下积分使用倒代换方法时**均**会出现这样的问题

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x,\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x,\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

建议使用三角代换来做，硬要用倒代换来做只能按 x 大于 0 /小于 0 分类讨论了

额外的问题

函数 $y=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|$ 的图像怎么看起来那么像奇函数啊，能证明吗?

等价于证明 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数

提示

若 $a\cdot b=1$，有 $\ln(ab)=\ln a+\ln b=0\Rightarrow\ln a=-\ln b=\ln\frac{1}{b}$

事实上，$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh}x$ 的表达式